05-10-16

• Προβλήματα σχετιζόμενα με τη Θεωρία Αριθμών

{1600 πΧ}: Βαβυλώνιοι

⇒ Υπάρχουν τριάδες φυσικών αριθμών (α, b, c) έτσι ώστε: $\alpha^2+b^2=c^2$;

Απάντηση: Ναι: πχ $3^2+4^2=5^2$

• Οι τριάδες φυσικών αριθμών α, b, c έτσι ώστε $\alpha^2+b^2=c^2$, καλούνται "Πυθαγόρειες Τριάδες".

▾ Αν (a,b,c) είναι μια Πυθαγόρεια τριάδα, τότε η τριάδα (da, db, dc) είναι επίσης Πυθαγόρεια τριάδα, διότι:

$$(da)^2+(db)^2=d^2\cdot\alpha^2+d^2\cdot b^2=d^2(\alpha^2+b^2)=d^2c^2=(dc)^2$$

Επομένως, το πλήθος των Πυθαγόρειων τριάδων είναι άπειρο.

• Ερώτημα: Είναι το άθροισμα δύο κυβικών αριθμών, επίσης κυβικός αριθμός;

Γενικότερα, είναι το άθροισμα 2 n-οστών δυνάμεων, n-οστή δύναμη $(n\geq 1)$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν φυσικοί x, y, z έτσι ώστε: $x^n+y^n=z^n$ $(n\geq 1)$

- (1637) : Fermat

Όχι : αν $n=4$

- ($18^{ος}$ - $19^{ος}$ αιων.) : Gauss - Euler

- Όχι : αν $n=3$

- Όχι : αν $n=5$

- (1823) : Sophie Germain

Όχι : αν n πρώτος αριθμός, έτσι ώστε

$$\begin{cases} 2n+1 : \text{πρώτος} \\ n \nmid (x \cdot y \cdot z) \end{cases}$$

Θεώρημα : Για κάθε $n \geq 3$ δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι x, y, z έτσι ώστε:

$x^n + y^n = z^n$ (Andrew Wiles) - (Taylor) $\simeq$ 1994

- Δίδυμοι Πρώτοι : Δύο πρώτοι αριθμοί καλούνται δίδυμοι $\Leftrightarrow |p-q| = 2$

Δηλ. p, q : πρώτοι και $q = p+2$, αν $p < q$

πχ: 3, 5 : δίδυμοι πρώτοι

5, 7 : -- " --

11, 13 : -- " --

Ανοιχτό Πρόβλημα: Είναι το πλήθος των διδύμων πρώτων αριθμών άπειρο;

(Ισοδύναμα):

Είναι το πλήθος των πρώτων p, q έτσι ώστε $|p-q|=2$ άπειρο;

Γενικά: Είναι το πλήθος των πρώτων p, q έτσι ώστε $|p-q| \leq k$, για $k \geq 2$, άπειρο;

Zhang: (2013). Υπάρχει τουλάχιστον ένας φυσικός $k \leq 70.000.000$ έτσι ώστε το πλήθος των πρώτων $p, q : |p-q| \leq k$, να είναι άπειρο.

Προς το παρόν το k μπορεί να επιλεχθεί ≤ 600

- **Εικασία του Goldbach:** Κάθε άρτιος φυσικός μεγαλύτερος του 2 είναι άθροισμα πρώτων αριθμών.

- **Ασθενής Εικασία του Goldbach:** Κάθε περιττός φυσικός αριθμός μεγαλύτερος του 5 είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών

- (1937): Vinogradof: Υπάρχει $c \in \mathbb{N}$: Κάθε περιττός μεγαλύτερος του c είναι άθροισμα τριών πρώτων αριθμών

$c \simeq 3^{3^{15}}$

- Helfgott (2014): Η ασθενής εικασία είναι αληθής.

• Ανοιχτό Πρόβλημα: Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί της μορφής: n^2+1;

• Θεώρημα Dirichlet: Υπάρχουν άπειροι πρώτοι της μορφής $ak+b$, a,b: πρώτοι μεταξύ τους $\{(a,b)=1\}$

• $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,\dots\}$ Στο σύνολο $\mathbb{N}$ ορίζονται οι πράξεις πρόσθεσης/πολλ/μού

$$\forall a,b\in \mathbb{N}: a+b\in \mathbb{N}$$
$$a\cdot b\in \mathbb{N}$$

• Ιδιότητες: ① $a+(b+c)=(a+b)+c$, $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ } Προσεταιριστική Ιδιότητα

② $a+b=b+a$, $a\cdot b=b\cdot a$ } Μεταθετική Ιδιότητα

③ $a\cdot(b+c)=ab+ac$, $(a+b)c=ac+bc$ } Επιμεριστική Ιδιότητα πρόσθεσης ως προς πολλ/μό

④ Στο $\mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N}\cup\{0\})=\{0,1,2,\dots\}$: $a+0=0=0+a$

Στο $\mathbb{N}$: $a\cdot 1=a=1\cdot a$

⑤ Στο $\mathbb{Z}$: $\forall a\in \mathbb{Z}$: $a+(-a)=0=(-a)+a$

Στο $\mathbb{Q}$: $\forall a\in \mathbb{N}$: $a\cdot\frac{1}{a}=1=\frac{1}{a}\cdot a$

Σύμβαση: $\forall\, a,b \in \mathbb{Z} : a-b \overset{op}{=} a+(-b)$

⑥ $a\cdot b=0 \Rightarrow a=0$ ή $b=0$

• Αν $a,b \in \mathbb{Z}$, τότε: $a>b \Longleftrightarrow a-b \in \mathbb{N}$

$a \geq b \Longleftrightarrow$ Είτε $a>b$ ή $a=b$

⑦ • $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

• $a<b \Rightarrow a\cdot c<b\cdot c \quad \forall\, c \in \mathbb{N}$